ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ - BOLZANO.

1) Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x+x^2+3x}{x}, & -\pi\le x<0 \\ e^x-x+3, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν πληρεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο διάστημα $\Delta[-\pi,1]$.

ΛΥΣΗ

Για να ισχύει το Θ. Bolzano θα πρέπει:

- f συνεχής στο $\Delta[-\pi,1]$

Προφανώς, η f συνεχής στα $[-\pi,0)$ και $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα, εξετάζουμε στο 0 ως προς τη συνέχεια. Αρκεί νδο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$f(0)=e^0-0+3=4$

$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-x+3)=4$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x+x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+x+3\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}+\lim_{x\to 0^-}x+3=1+3=4$$, Άρα συνεχής στο 0

Για να 'μαστε απόλυτα σωστοί όμως εξετάζουμε εάν η f συνεχής στα $-\pi$ και 1 από δεξιά και αριστερά αντίστοιχα.

$$\lim_{x\to -\pi^+} f(x)=\lim_{x\to -\pi^+}\frac{\eta\mu x+x^2+3x}{-\pi}=-\pi+3=f(-\pi)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^x-x+3=e+2=f(1)$$

Άρα, f συνεχής στα σημεία $-\pi$ και 1

• $f(-\pi)\cdot f(1) = (-\pi+3)(e+2) < 0$

Αρα, πληρεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano

2) Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(-1)=2k$, $f(2)=-\lambda$

ΝΔΟ $\exists \xi \in [-1,2]$ ώστε $k-f(\xi)=\lambda\cdot\xi$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ως $\varphi(x) = k - f(x) - \lambda x$

- φ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(-1) = k - f(-1) + \lambda = \lambda - k$
- $\varphi(2) = k - f(2) - 2\lambda = -(\lambda - k)$

Αρα, $\varphi(-1)\cdot\varphi(2) = -(\lambda-k)^2 \leq 0$

$\varphi(-1)\cdot\varphi(2) = 0$

$\varphi(-1)=0$ ή $\varphi(2)=0$

$\xi=-1$ ή $\xi=2$

$\varphi(-1)\cdot\varphi(2) < 0$

άρα από Θ. Bolzano

$\exists \xi \in (-1,2)$ τω: $\varphi(\xi)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k - f(\xi) = \lambda\xi$.

3) Έστω η συνάρτηση

$f(x) = \sqrt{x} - \log(9-x)$, να βρείτε:

α. τη μονοτονία της f

β. το πεδίο εικόνων της f

γ. ΝΔΟ $\sqrt{x} - \log(9-x) = e$ έχει μια ακριβώς λύση στο Π.Ο της.

ΛΥΣΗ

α. $D_f = \{x \geq 0$ και $9 - x > 0\} = [0,9)$

$\forall x_1, x_2 \in [0,9)$:

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ και • $-x_1 > -x_2 \Rightarrow \log(9-x_1) > \log(9-x_2) \Rightarrow$

Αρα, $f(x_1) < f(x_2)$, η $f \uparrow$ $\Rightarrow -\log(9-x_1) < -\log(9-x_2)$

β. Λόγω ότι $f\uparrow$ τότε $R_f = [f(0), \lim_{x\to 9^+} f(x)) = [-\log 9, +\infty)$

γ. $f(x) = e$, το $e \in R_f$

άρα από Θ. ενδ. τιμής $\exists x_0 \in [0,9)$ τω: $f(x_0) = e$ και λόγω ότι η $f \uparrow$ θα είναι και μοναδικό